Concursul Interjudețean de Matematică "Cristian S. Calude"
Ediția a XVIII-a
Proba pe echipe, clasele VII-VIII
22 noiembrie 2017

Soluții

Runda II

Problema 1.

Determinaţi $x\in\mathbb{N}^*$ ştiind că

$$\frac{1}{x\cdot(x+2)}+\frac{1}{(x+2)\cdot(x+4)}+\frac{1}{(x+4)\cdot(x+6)}+\frac{1}{(x+6)\cdot(x+8)}=\frac{1}{45}$$

Soluție:

Scriem fiecare fracţie ca pe o diferenţă de fracţii şi după reducere obţinem:

$\frac{1}{2}\cdot\left(\frac{1}{x}-\frac{1}{x+8}\right)=\frac{1}{45}\Leftrightarrow\frac{4}{x\cdot(x+8)}=\frac{1}{45}\Leftrightarrow x\cdot(x+8)=180$ de unde ţinând cont că $x\in\mathbb{N}^*$ avem unica soluţie $x=10$.

$$R: x=10$$

Problema 2.

Rezolvaţi în $\mathbb{R}$ ecuaţia : $\left|\frac{x^2+2\cdot x-24}{x^2-9\cdot x+20}\right|=10$.

Soluție:

Punem condiţiile de existenţă şi obţinem $x\in\mathbb{R}-\{4;5\}$ iar apoi se poate scrie

$\left|\frac{(x-4)(x-6)}{(x-4)(x-5)}\right|=10\Leftrightarrow\left|\frac{x-6}{x-5}\right|=10\Leftrightarrow\frac{x-6}{x-5}=10$ sau $\frac{x-6}{x-5}=-10$ de unde rezultă

$x=\frac{56}{9}$ sau $x=4$ care evident nu convine, deci soluţie unică $x=\frac{56}{9}$.

$$R: x=\frac{56}{9}$$

Problema 3.

Calculaţi cardinalul mulţimii : $A=\left\{x\in\mathbb{Q}\,/\,x=\frac{n^2+3}{n^2+n},n=1,2,3,...,2017\right\}$.

Soluție:

Aflăm câte perechi $(k;l)$ cu $k,l\in\{1,2,...,2017\},k\neq l$ provoacă fracţii echivalente.

Avem $\frac{k^2+3}{k^2+k}=\frac{l^2+3}{l^2+l}\Leftrightarrow k^2\cdot l+3\cdot l^2+3\cdot l=k\cdot l^2+3\cdot k^2+3\cdot k\Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow k\cdot l\cdot(k-l)+(3\cdot l+3\cdot k)\cdot(l-k)+3\cdot(l-k)=0\Leftrightarrow (k-l)\cdot(k\cdot l-3\cdot l-3\cdot k-3)=0$ de unde $k=l$ care nu interesează sau $(k-3)\cdot(l-3)=12$ de unde analizând posibilităţile obţinem imediat perechile : $(4;5)$, $(5;9)$, $(6;7)$.

Deoarece am găsit 3 perechi vom avea $card(A)=2014$.

$$R: card(A)=2014$$